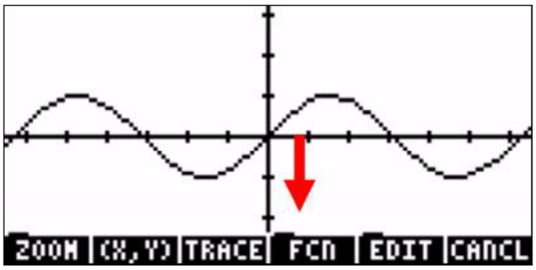
Cálculo científico y técnico con HP49g/49g+/49gII
Módulo 2: **Recursos Avanzados**
Tema 2.2 **Recursos de cálculo gráfico**

Francisco Palacios
Escuela Universitaria Politécnica de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

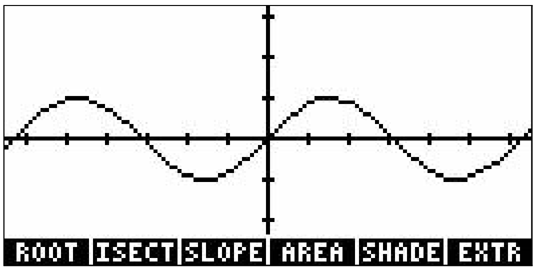
Mayo 2005, versión 1.1

1 Introducción

La aplicación de representación gráfica contiene un menú de herramientas de cálculo [FCN] para funciones del tipo $y = f(x)$. El acceso se realiza desde la *pantalla gráfica* pulsando [F4]



Entre la posibilidades que nos ofrece [FCN] están el cálculo de puntos de corte con el eje OX, el punto de corte entre dos curvas y la determinación de extremos. Para ello usa métodos de cálculo numérico, tomando como valor inicial la coordenada x de la posición actual del cursor.
En la primer página de [FCN]



encontramos las siguientes opciones

- `ROOT`. Calcula el corte con el eje OX.
- `ISECT`. Calcula el punto de corte entre dos curvas.
- `SLOPE`. Calcula la pendiente en el punto de la gráfica.
- `AREA`. Calcula numéricamente integrales indefinidas.
- `SHADE`. Sombrea una zona bajo la curva. Si hay dos funciones, sombrea la región entre las curvas.
- `EXTR`. Calcula extremos relativos.

En todos los casos, se toma el valor de x de la posición actual del cursor. Al presentar los resultados, desaparece la línea de menús. Pulsando [+], [−] o una de las teclas de función [F1],. . . ,[F6], la línea de menú vuelve a ser visible. También se carga en la pila una copia del resultado con la etiqueta correspondiente. La segunda página del menú contiene las siguientes opciones

- `F(x)`. Calcula el valor de la función.
- `F'(x)`. Calcula la función derivada y genera una representación conjunta con la función. La expresión de la derivada se añade a la lista de funciones a representar.
- `TANL`. Calcula la recta tangente y la representa conjuntamente con la función. No añade la ecuación de la recta a la lista de funciones a representar.
- `NXEQ`. Cambia de función *activa.* En las representaciones múltiples, la variable EQ contiene una lista con las expresiones a representar. Todos los comandos, salvo ISECT, actúan sobre una sola función. Si EQ contiene una lista, los comandos actúan sobre la primera función de la lista (*función activa*). De hecho, NXEQ hace rotar los elementos de la lista contenida en EQ.
- `VIEW`. Muestre la función activa
- `PICT`. Sale de [FCN] y vuelve al menú principal de la pantalla gráfica.

Actividad 1.1 *Dibuja la curva* $y = \sin(x)$ *con* $x \in [-3, 3]$. *Usa* [AUTO] *para calcular el rango de* y. *Accede a* [FCN] *y observa las opciones descritas en las dos páginas de menú. Oculta y visualiza la línea de menú usando* [+].

2 Ejemplos de uso de los comandos

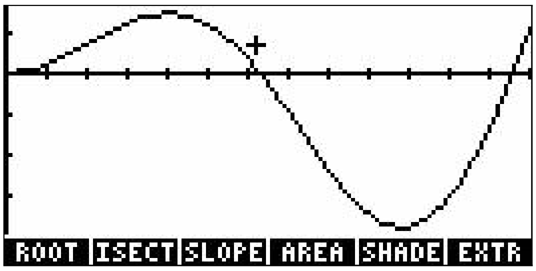
A continuación se presentan algunos ejemplos de cómo usar los comandos ROOT, ISECT y EXTR.

2.1 Comando ROOT

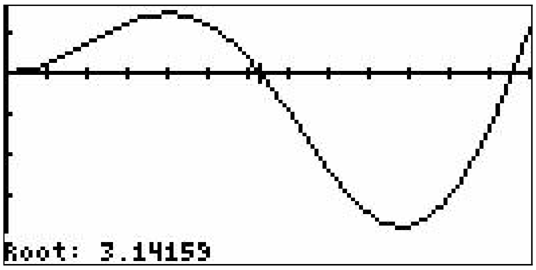
El comando calcula el corte con el eje X. Consideremos la curva

$$y = x \sin(x)$$

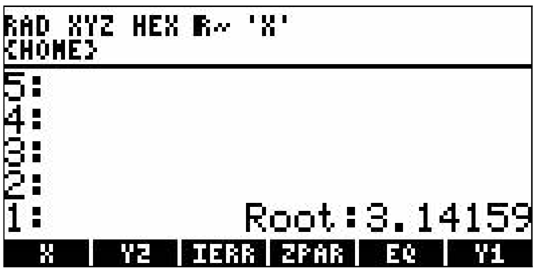
La representación con $x \in [0, 6.5]$, $y \in [-6, 2]$ es



Situamos el cursor en proximidad del punto de corte y pulsamos [ROOT].



El cursor se sitúa en el punto de corte y se muestra la solución en pantalla. En la pila se guarda una copia etiquetada del valor



Actividad 2.1 *Representa la curva* $y = \cos x - x$ *y calcula el corte con el eje* X. (*Sol.* $x = 0.73909$)

Actividad 2.2 *Representa la curva* $y = \cos x - x^2$ *y calcula el corte con el eje* X. (*Sol.* $x = \pm 0.82413$)

Actividad 2.3 *Representa la curva* $y = \cos(x^2) - x$ *y calcula el corte con el eje* X. (*Sol.* $x = 0.80107$)

Actividad 2.4 *Representa la curva* $y = e^x + x^3$ *y calcula el corte con el eje* X. (*Sol.* $x = -0.77288$)

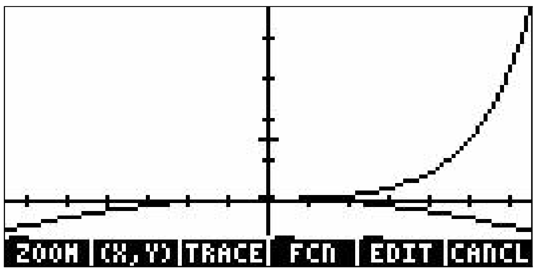
2.2 Comando ISECT

El comando ISECT calcula el punto de corte de dos curvas. Por ejemplo, consideremos las funciones

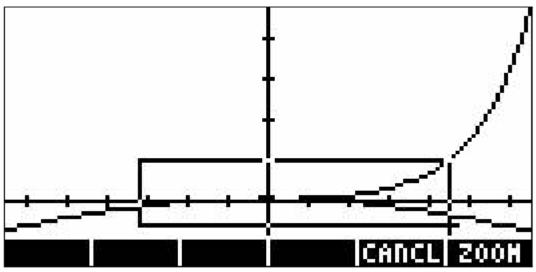
$$y = e^x, \quad y = 2 - x^2.$$

Accedemos al formulario `Equation Entry`, y definimos las dos funciones

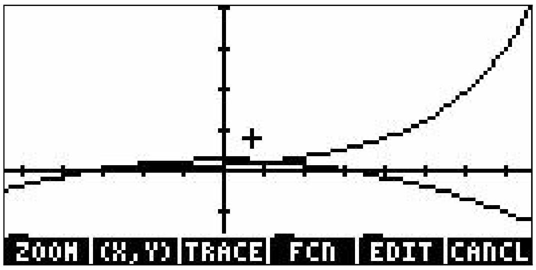
Para ajustar los rangos de representación podemos usar BOXZ, que nos dará los valores aproximados de la región de interés. Por ejemplo, supongamos en un primer intento hemos obtenido el siguiente gráfico



Seleccionamos la zona de interés con BOXZ

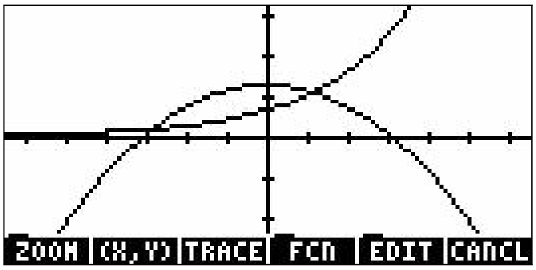


y aplicamos el ZOOM

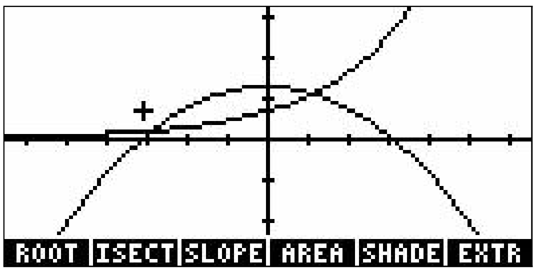


Podemos continuar aplicando BOXZ sobre la zona de interés, o bien, cancelar la pantalla gráfica y acceder al formulario `Plot-Window`

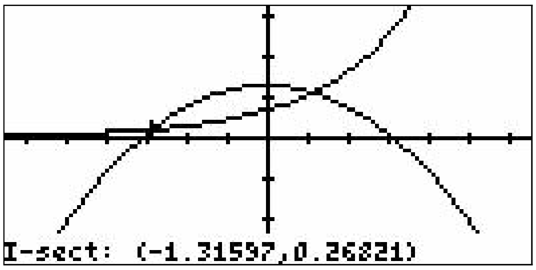
para ajustar manualmente el rango de representación. Si ajustamos el rango de x a $[-3, 3]$ y el rango de y a $[-5, 5]$, resulta



Vamos a calcular el punto de corte con $x < 0$. Situamos el cursor en las proximidades del corte y pulsamos [FCN][ISECT]



Como resultado, obtenemos



Una copia etiquetada del resultado se carga en la pila. Pulsa [+] para que aparezca nuevamente la línea de menús.

Actividad 2.5 *Representa conjuntamente las curvas* $y = e^x$, $y = 2\cos x$. *Usa* $[(x, y)]$ *y* [TRACE] *para determinar aproximadamente los puntos de intersección. Usa* ISECT *para determinarlos con precisión.*

Actividad 2.6 *Representa conjuntamente las curvas* $y = e^{-x}$, $y = \sin x$. *Usa* $[(x, y)]$ *y* [TRACE] *para determinar aproximadamente los puntos de intersección con* $x < 10$. *Usa* ISECT *para determinarlos con precisión.*

Actividad 2.7 *El formato del punto de corte se ve afectado por el modo de coordenadas. Fija el modo de coordenadas* Polar. *Calcula gráficamente los puntos de corte de las curvas* $y = 1 - x^2$, $y = \sqrt{x}$ *¿Qué resultado obtienes? Cancela el gráfico, reestablece el modo de coordenadas* Rectangular *y observa como se modifica el resultado en la pila y en el gráfico.*
(*Sol. Corte en coordenadas polares* $(r = 0.8946, \theta = 0.9438 \text{ rad})$. *Coordenadas rectangulares* $(x = 05249, y = 0.7245)$)

Actividad 2.8 *Intenta determina manualmente el punto de corte de las curvas* $y = 1 - x^2$, $y = \sqrt{x}$. *Si es preciso, usa las herramientas para solucionar ecuaciones de la calculadora.* (*Sol. Se obtiene la ecuación* $y^4 + y - 1 = 0$. *El comando* SOLVEX *no puede resolverla, si usamos* PROOT *obtenemos las raíces reales* $y = -0.2207$, $y = 0.7245$)

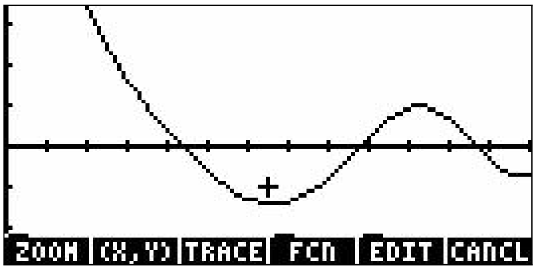
Nota. Si EQ contiene una lista con más de dos expresiones, el comando ISECT se aplica a las dos primeras.

2.3 Comando EXTR

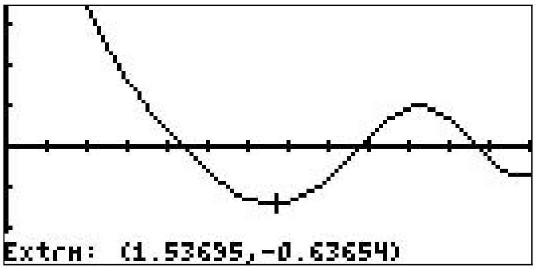
Este comando determina los extremos relativos. Tomemos por ejemplo la función

$$y = \frac{\sin(1 - x^2)}{x}$$

en el intervalo $x \in [0, 3]$



Situamos el cursor cerca del primer mínimo relativo, y pulsamos [FCN][EXTR]



Actividad 2.9 *Calcula el extremo relativo que tiene*

$$y = \frac{\sin\left(1 - x^2\right)}{x}$$

en las proximidades de $x = 1.5$ *usando el método de Newton-Raphson.*

Actividad 2.10 *Determina los extremos relativos de la función*

$$f(x) = \frac{\sin(x^2) + \cos(x^2)}{x}$$

en el intervalo $x \in [0, 3]$. (*Sol. Mínimo para* $x = 1.8493$, $y_{\min} = -0.7196$. *Máximo en* $x = 2.6450$, $y_{\max} = 0.5333$)

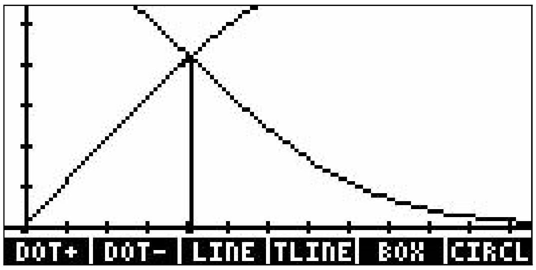
3 Ejemplos de aplicación

Ejemplo 3.1 *Representa el recinto limitado por las curvas*

$$y = \sin x \qquad y = e^{-x^2}$$

la recta $x = 2$ *y el eje* OX.

Representamos las curvas $y = \sin x$, $y = e^{-x^2}$



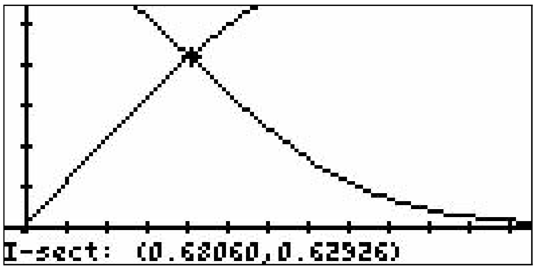
El área del recinto tiene el valor

$$\int_0^{x_1} \sin x \, dx + \int_{x_1}^{2} e^{-x^2} dx$$

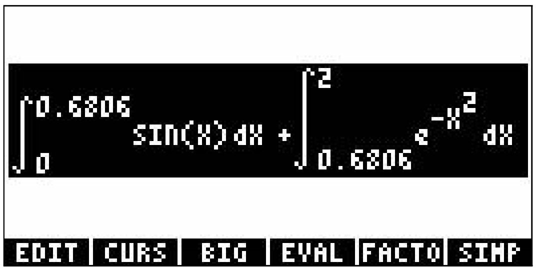
El problema consiste en determinar la coordenada x del punto de corte, para ello debemos resolver numéricamente la ecuación

$$\sin(x) - e^{-x^2} = 0$$

Usando ISECT, obtenemos



Por lo tanto, el valor del área de la región es



de donde obtenemos el valor $A = 0.5162$ $\square$

Actividad 3.1 *Resuelve la ecuación* $\sin(x) - e^{-x^2} = 0$ *usando el formulario* Solve Equation *de* [NUM.SLV].

Actividad 3.2 *Resuelve la ecuación* $\sin(x) - e^{-x^2} = 0$ *usando el método de Newton-Raphson.*

Ejemplo 3.2 *Determina la longitud del arco de parábola $y = x^2$ desde el origen hasta su intersección con la curva $y = \cos x$.*

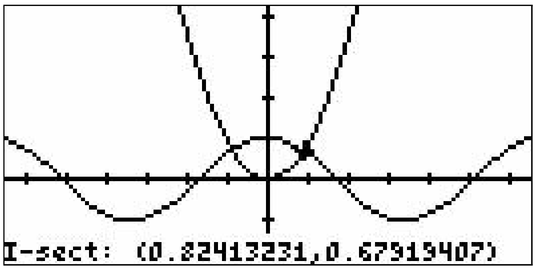
Para una curva $y = f(x)$, la longitud de arco desde el punto $(x_1, f(x_1))$ hasta el punto $(x_2, f(x_2))$ se calcula mediante la integral

$$\boxed{L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}$$

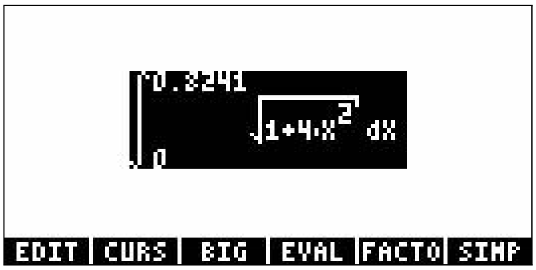
En nuestro caso, es $x_1 = 0$, y $f'(x) = 2x$, por lo tanto

$$L = \int_0^{x_2} \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

el problema está en determinar x_2, representando las curvas y usando ISECT, obtenemos



Por lo tanto, la longitud de arco se calcula como



de donde obtenemos $L = 1.1129$. □

Actividad 3.3 *Calcula la longitud del arco de parábola $y = 2 - x^2$ que queda por encima de la curva $y = e^x$.*
(*Sol.* $L = \int_{-1.3160}^{0.5373} \sqrt{1 + 4x^2} dx = 2.9041$)

e-mail: `francisco.palacios@upc.edu`