Cálculo científico y técnico con HP49g/49g+/49gII
Módulo 3: **Aplicaciones**
Tema 3.1 **Resolución aproximada de ecuaciones: Método de Newton-Raphson**

Francisco Palacios
Escuela Universitaria Politécnica de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Abril 2005, versión 1.1

1 Introducción

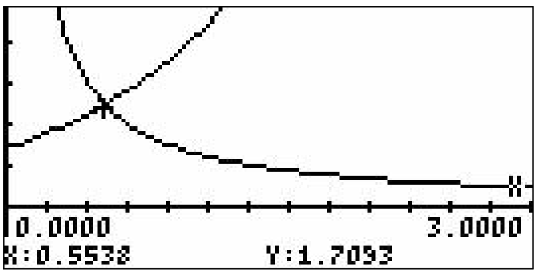
El método de Newton-Raphson es un método iterativo que nos permite aproximar la solución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$.
Partimos de una estimación inicial de la solución x_0, y las siguientes se calculan de forma recurrente mediante la fórmula

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}$$

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$e^x = \frac{1}{x}$$

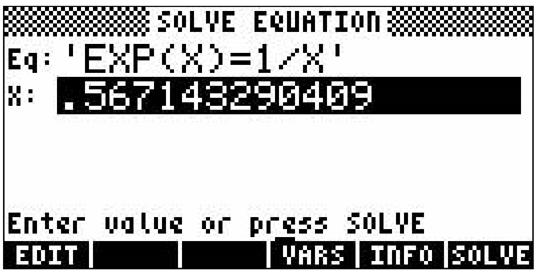
En este caso es imposible despejar la incógnita, no obstante, si representamos las curvas $y = e^x$, $y = 1/x$ en el intervalo $x \in [0, 4]$, es evidente que la ecuación tiene una solución en este intervalo



Para aplicar el método de Newton-Raphson, segimos los siguientes pasos

1. Expresamos la ecuación en la forma $f(x) = 0$, e identificamos la función f. En el ejemplo es
$$f(x) = e^x - \frac{1}{x}$$
2. Calculamos la derivada
$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$$
3. Construimos la fórmula de recurrencia
$$x_{j+1} = x_j - \frac{e^{x_j} - \frac{1}{x_j}}{e^{x_j} + \frac{1}{x_j^2}}$$
4. Tomamos una estimación inicial de la solución, por ejemplo $x_0 = 1.0$, y calculamos las siguientes aproximaciones. Desde el punto de vista práctico, si deseamos aproximar la solución con 6 decimales, podemos detener los cálculos cuando dos aproximaciones consecutivas coincidan hasta el decimal 8. En nuestro caso, obtendríamos
$$\begin{aligned} x_0 &= 1.0 \\ x_1 &= 0.53788\,284 \\ x_2 &= 0.56627\,701 \\ x_3 &= 0.56714\,258 \\ x_4 &= 0.56714\,329 \\ x_5 &= 0.56714\,329 \end{aligned}$$
5. Podemos, entonces, tomar como solución $x = 0.567143$

Si empleamos la aplicación de resolución numérica de ecuaciones de la calculadora[1], resulta



Actividad 1.1 *Calcula el valor de x_1, x_2, x_3, del ejemplo anterior.*

[1] Numeric Solve. Solve equation. Acceso con ↱[4]

Actividad 1.2 *Resuelve gráficamente la ecuación* $e^x = \frac{1}{x}$.

Actividad 1.3 *Resuelve la ecuación* $e^x = \frac{1}{x}$ *usando la aplicación de resolución numérica de ecuaciones de la calculadora. Usa como estimación inicial* $x_0 = 1$.

Actividad 1.4 *Resuelve gráficamente la ecuación* $e^x = \frac{1}{x^2}$.

Actividad 1.5 *Resuelve la ecuación* $e^x = \frac{1}{x^2}$ *usando la aplicación de resolución numérica de ecuaciones de la calculadora. Usa como estimación inicial* $x_0 = 1$. (*Sol.* $x = 0.70346742$)

Actividad 1.6 *Resuelve gráficamente la ecuación* $\ln x = \frac{1}{x}$

Actividad 1.7 *Resuelve la ecuación* $\ln x = \frac{1}{x}$ *usando la aplicación de resolución numérica de ecuaciones de la calculadora. Usa como estimación inicial* $x_0 = 1.5$. (*Sol.* $x = 1.7632228$)

2 Aplicación del método con la calculadora

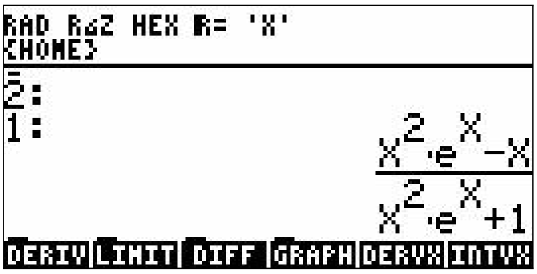
El cálculo de los sucesivos valores $x_1, x_2, \ldots$, usando calculadoras convencionales puede ser bastante costoso. En nuestro caso, la idea es construir una función

$$G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

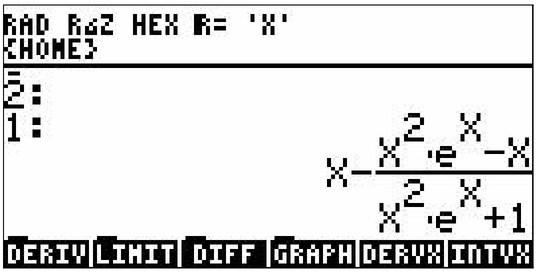
entonces podemos calcular los valores $x_1, x_2, \ldots$, con una simple pulsación de tecla. Siguiendo con el ejemplo anterior, el procedimiento es como sigue

1. Escribimos en la pila la expresión de $f(x)$ y la duplicamos

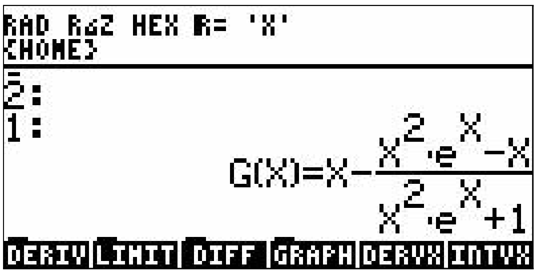
2. Aplicamos el comando DERVX para calcular $f'(x)$, y pulsamos [÷]. Entonces tenemos el nivel 1 de la pila la expresión $f(x)/f'(x)$. Podemos ejecutar EVAL para simplificar la expresión



3. Para acabar de construir la expresión $x - f(x)/f'(x)$ entramos x ejecutamos SWAP[2] para intercambiar el contenido del nivel 1 y el nivel 2 de la pila y restamos. Se obtiene la expresión



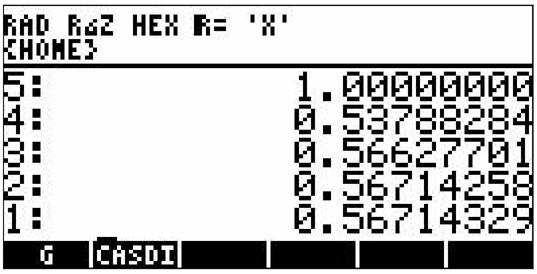
4. Ahora vamos a construir la función $G(x)$. Esto podemos realizarlo de varias formas. Por ejemplo, podemos cargar la expresión 'G(X)' en la pila, ejecutar SWAP y pulsar[3] [=] para construir la expresión



   y ejecutar el comando[4] DEFINE.

5. Una vez ejecutado el comando DEFINE, pulsamos [VAR] para acceder al *área de variables* y veremos que ha quedado definida la función $G(x)$. Ahora, para calcular las distintas iteraciones, sólo es preciso colocar el valor inicial en la pila y pulsar reiteradamente la tecla de función correspondiente

[2] Tecla [▶]
[3] Tecla ↱[W]
[4] Tecla ↰[2]



Si queremos guadar en la pila una copia del valor de las sucesivas aproximaciones, podemos pulsar [ENTER] para duplicar el valor antes de evaluar $G(x)$.

Actividad 2.1 *Aproxima la solución de la ecuación*

$$\ln(x) = \frac{1}{x}$$

con 5 *decimales exactos usando el método de Newton-Raphson a partir del valor inicial* $x_0 = 1.5$. *Verifica la solución sustituyendo el valor en la ecuación. Calcula la solución de la ecuación usando el* Numeric Solver*.*
(*Sol.* 1.76322283)

Actividad 2.2 *Representa gráficamente la ecuación*

$$\ln x = \cos x$$

¿Cuántas soluciones hay en el intervalo $(0, 6)$*? Calcula las soluciones usando los recursos de cálculo contenidos en el menu* [FCN] *de la pantalla de gráficos.* (*Sol.* $x = 1.30296400$)

Actividad 2.3 *Aproxima la solución de la ecuación*

$$\ln x = \cos x$$

con 5 *decimales exactos usando el método de Newton-Raphson a partir del valor inicial* $x_0 = 1.0$. *Verifica la solución sustituyendo el valor en la ecuación. Calcula la solución de la ecuación usando el* Numeric Solver*.*

Actividad 2.4 *Representa graficamente la ecuación*

$$\ln x = \sin x$$

Usando [(X,Y)] *estima el valor de la solución. Emplea el método de Newton-Raphson a partir del valor inicial estimado para aproximar la solución con* 8 *decimales. Verifica el resultado usando el* Numeric Solver*.*